Varianta 21

Subiectul I.

a) De exemplu numerele 1, -1, i au modulul egal cu 1.

b) Distanța căutată este $3\sqrt{2}$.

c) $(x-1)^2+(y-1)^2-25=0$.

d) **)** Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN}=2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD}=\frac{9}{2}$.

f) $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul II.

1.

a) $\det(A)=0$.

b) $\text{rang}(A)=2$.

c) Probabilitatea căutată este $p=\frac{1}{5}$.

d) $g(5)=1$.

e) $x=1$.

2.

a) Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{2}$ are $f'(x)=x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

b) Pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, avem: $f(x)=2x$, $\int_0^1 f(x)\,dx=1$.

c) $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x)=2x$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\int_0^1 xe^x\,dx=1$.

Subiectul III.

a) Se arată prin calcul direct.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se arată prin calcul direct.

d) De exemplu, $(1,2)\circ(2,3)=(2,5)$, iar $(2,3)\circ(1,2)=(2,7)$, deci $(1,2)\circ(2,3)\neq(2,3)\circ(1,2)$

e) se arată uşor că „$\circ$” este lege de compoziție pe mulțimea G şi se folosesc punctele **a)**, **d), b)** şi **c)**.

f) Se demonstrează prin inducție.

g) Folosind punctul **f)**, demonstrăm de fapt că $\forall\, a > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, există $u > 0$, $v \in \mathbf{R}$, astfel încât $\begin{cases} u^n = a \\ v\left(1 + u + \ldots + u^{n-1}\right) = x \end{cases}$.

Soluția sistemului anterior este $\begin{cases} u = \sqrt[n]{a} > 0 \\ v = \dfrac{x}{1 + \sqrt[n]{a} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \in \mathbf{R} \end{cases}$.

Subiectul IV.

a) $I_1 = \dfrac{2}{3}$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se foloseşte principul întâi al inducției matematice şi relația de recurență de la punctul **b)**.

d) Se ridică la pătrat şi se fac calculele.

e) Dând pe rând lui x valorile $4, 6, \ldots, 2n$ în inegalitatea din **d)**, înmulțind inegalitățile obținute deducem: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}} \le \dfrac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n}{2n+1} < \sqrt{\dfrac{5}{2n+3}}$

Înmulțind inegalitatea precedentă cu inegalitatea evidentă: $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} < \sqrt{\dfrac{3}{5}}$

obținem concluzia.

f) Din **e)** avem, $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}} < I_n < \sqrt{\dfrac{3}{2n+3}}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$ şi trecând la limită în inegalitatea precedentă şi folosind criteriul cleştelui, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

g) Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln I_n}{n}}$.

Logaritmând în dubla inegalitate din **e)**, obținem:

$$\ln \frac{2}{3\sqrt{n}} < \ln I_n < \ln \sqrt{\frac{3}{2n+3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \ln n}{n} < \frac{\ln I_n}{n} < \frac{\ln \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2n+3)}{n}$$

Trecând la limită în inegalitatea precedentă şi folosind criteriul cleştelui, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln I_n}{n} = 0$ şi obținem în final $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n} = e^0 = 1$.